Text S2: Supporting Information for

Coordinated optimization of visual cortical maps (I) Symmetry-based analysis

1 Amplitude equations for higher order coupling energies

Here, we list the amplitude equations for the OP dynamics in case of the high order inter-map coupling energies $U = \epsilon|\nabla z \cdot \nabla o|^4$ and $U = \tau|z|^4 o^4$.

$$
\begin{aligned}
\partial_t A_i \quad = \quad & r_z A_i - \sum_j |A_j|^2 A_i \Bigg(g_{ij} + \delta^4 g'_{ij} + \delta^2 \sum_u g_{iju} |B_u|^2 \\
& + \delta g''_{ij} \left(B_1 B_2 B_3 + \overline{B}_1 \overline{B}_2 \overline{B}_3 \right) + \sum_{u,v} g_{ijuv} |B_u|^2 |B_v|^2 \Bigg) \\
& - \sum_j |A_{j^-}|^2 A_i \Bigg(g_{ij^-} + \delta^4 g'_{ij^-} + \delta^2 \sum_u g_{ij^-u} |B_u|^2 \\
& + \delta g''_{ij^-} \left(B_1 B_2 B_3 + \overline{B}_1 \overline{B}_2 \overline{B}_3 \right) + \sum_{u,v}^3 g_{ij^-uv} |B_u|^2 |B_v|^2 \Bigg) \\
& - \sum_j A_j A_{j^-} \overline{A}_{i^-} \Bigg(f_{ij} + \delta^4 f'_{ij} + \delta^2 \sum_u f_{iju} |B_u|^2 \\
& + \delta f''_{ij} \left(B_1 B_2 B_3 + \overline{B}_1 \overline{B}_2 \overline{B}_3 \right) + \sum_{u,v} f_{ijuv} |B_u|^2 |B_v|^2 \Bigg) \\
& - \sum_{j \neq l} A_i A_j \overline{A}_l \left(\sum_u h^{(1)}_{ijlu} \overline{B}_j B_l |B_u|^2 + \delta^2 h^{(1)}_{ijl} \overline{B}_j B_l \right) \\
& - \sum_{j,l} A_i A_{j^-} \overline{A}_l \left(\sum_u h^{(1)}_{ij^-lu} B_j B_l |B_u|^2 + \delta^2 h^{(1)}_{ij^-l} B_j B_l \right) \\
& - \sum_{j,l} A_i A_j \overline{A}_{l^-} \left(\sum_u h^{(1)}_{ijl^-u} \overline{B}_j \overline{B}_l |B_u|^2 + \delta^2 h^{(1)}_{ijl^-} \overline{B}_j \overline{B}_l \right) \\
& - \sum_{j \neq l} A_i A_{j^-} \overline{A}_{l^-} \left(\sum_u h^{(1)}_{ij^-l^-u} B_j \overline{B}_l |B_u|^2 + \delta^2 h^{(1)}_{ij^-l^-} B_j \overline{B}_l \right) \\
& - \sum_{l,j \neq k} A_j A_l \overline{A}_k h^{(2)}_{ijlk} \overline{B}_j \overline{B}_l B_k B_i - \sum_{l,j,k} A_{j^-} A_l \overline{A}_k h^{(2)}_{ij^-lk} B_j \overline{B}_l B_k B_i \\
& - \sum_{l,j \neq k} A_j A_l \overline{A}_{k^-} h^{(2)}_{ijlk^-} \overline{B}_j \overline{B}_l \overline{B}_k B_i - \sum_{l,j \neq k} A_{j^-} A_{l^-} \overline{A}_k h^{(2)}_{ij^-l^-k} B_j B_l B_k B_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{l,j\neq k} A_{j^-}A_l\overline{A}_{k^-}h^{(2)}_{ij^-lk^-}B_j\overline{B}_l\overline{B}_kB_i-\sum_{l,j\neq k} A_{j^-}A_{l^-}\overline{A}_{k^-}h^{(2)}_{ij^-l^-k^-}B_jB_l\overline{B}_kB_i\\
&-\sum_{j,l}|A_j|^2A_l\left(\sum_u h^{(3)}_{ijlu}|B_u|^2\overline{B}_lB_i+\delta^2h^{(3)}_{ijl}\overline{B}_lB_i\right)\\
&-\sum_{j,l}|A_{j^-}|^2A_l\left(\sum_u h^{(3)}_{ij^-lu}|B_u|^2\overline{B}_lB_i+\delta^2h^{(3)}_{ij^-l}\overline{B}_lB_i\right)\\
&-\sum_{j,l}|A_j|^2A_{l^-}\left(\sum_u h^{(3)}_{ijl^-u}|B_u|^2B_lB_i+\delta^2h^{(3)}_{ijl^-}B_lB_i\right)\\
&-\sum_{j,l}|A_{j^-}|^2A_{l^-}\left(\sum_u h^{(3)}_{ij^-l^-u}|B_u|^2B_lB_i+\delta^2h^{(3)}_{ij^-l^-}B_lB_i\right)\\
&-\sum_{j,u}\delta h^{(4)}_{iju}A_i\overline{A}_jA_uB_{u+1}B_{u+2}B_j-\sum_{j,u}\delta h^{(4)}_{iuj}A_iA_j\overline{A}_u\overline{B}_{u+1}\overline{B}_{u+2}\overline{B}_j\\
&-\sum_{j,u}\delta h^{(4)}_{ij^-u}A_i\overline{A}_{j^-}A_uB_{u+1}B_{u+2}\overline{B}_j-\sum_{j,u}\delta h^{(4)}_{ij^-u}A_iA_{j^-}\overline{A}_u\overline{B}_{u+1}\overline{B}_{u+2}\overline{B}_j\\
&-\sum_{j,u}\delta h^{(4)}_{iju^-}A_i\overline{A}_jA_{u^-}\overline{B}_{u+1}\overline{B}_{u+2}B_j-\sum_{j,u}\delta h^{(4)}_{iju^-}A_iA_j\overline{A}_{u^-}B_{u+1}B_{u+2}B_j\\
&-\sum_{j,u}\delta h^{(4)}_{ij^-u^-}A_i\overline{A}_{j^-}A_{u^-}\overline{B}_{u+1}\overline{B}_{u+2}\overline{B}_j-\sum_{j,u}\delta h^{(4)}_{ij^-u^-}A_iA_{j^-}\overline{A}_{u^-}B_{u+1}B_{u+2}\overline{B}_j\\
&-\sum_u h^{(5)}_{iu}A_iA_u\overline{A}_{(u+1)^-}B_{u+2}B_1B_2B_3-\sum_u h^{(5)}_{iu^-}A_iA_{u^-}\overline{A}_{(u+1)}\overline{B}_{u+2}B_1B_2B_3\\
&-\sum_u \tilde{h}^{(5)}_{iu}A_iA_u\overline{A}_{(u+1)^-}B_{u+2}\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3-\sum_u \tilde{h}^{(5)}_{iu^-}A_iA_{u^-}\overline{A}_{(u+1)}\overline{B}_{u+2}\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\\
&-\sum_u \delta^3h^{(5)}A_iA_u\overline{A}_{(u+1)^-}B_{u+2}-\sum_u \delta^3h^{(5)}A_iA_{u^-}\overline{A}_{(u+1)}\overline{B}_{u+2}\\
&-\sum_{j,u}\delta h^{(6)}_{iju}\overline{A}_jA_uA_{u+1}B_{u+2}B_jB_i-\sum_{j,u}\delta h^{(6)}_{ij^-u}\overline{A}_{j^-}A_uA_{u+1}B_{u+2}\overline{B}_jB_i\\
&-\sum_{j,u}\delta h^{(6)}_{iju^-}\overline{A}_jA_{u^-}A_{(u+1)^-}\overline{B}_{u+2}B_jB_i-\sum_{j,u}\delta h^{(6)}_{ij^-u^-}\overline{A}_{j^-}A_{u^-}A_{(u+1)^-}\overline{B}_{u+2}\overline{B}_jB_i\\
&-\sum \delta h^{(7)}_{iju}|A_j|^2A_uB_{u+1}B_{u+2}B_i-\sum \delta h^{(7)}_{ij^-u}|A_{j^-}|^2A_uB_{u+1}B_{u+2}B_i\\
&-\sum \delta h^{(7)}_{iju^-}|A_j|^2A_{u^-}\overline{B}_{u+1}\overline{B}_{u+2}B_i-\sum \delta h^{(7)}_{ij^-u^-}|A_{j^-}|^2A_{u^-}\overline{B}_{u+1}\overline{B}_{u+2}B_i\\
&-\sum \delta h^{(8)}_{ij}A_j^2\overline{A}_{i+2}\overline{B}_j^2\overline{B}_{i+1}-\sum \delta h^{(8)}_{ij^-}A_{j^-}^2\overline{A}_{i+2}B_j^2\overline{B}_{i+1}\\
&-\sum \delta^3h^{(9)}_{ij}|A_j|^2A_{(i+2)^-}\overline{B}_{i+1}-\sum \delta^3h^{(9)}_{ij^-}|A_{j^-}|^2A_{(i+2)^-}\overline{B}_{i+1}
\end{aligned}
$$

where the indices are considered to be cyclic i.e. $j+3=j$. All sums are considered to run from 1 to 3. In the article, these amplitude equations are specified in case of OD stripes, Eq. (109), OD hexagons, Eq. (110), or a constant OD solution, Eq (111).

2 Coupling coefficients

In the following, we list the non-zero elements of the coupling coefficients.

$$g_{ii} = 1 \qquad g_{ij} = 2 \qquad g'_{ii} = \tau \qquad g'_{ij} = 2\tau$$

$$g_{iji} = g_{ijj} = g_{iju} = 24\tau \qquad g_{iii} = g_{iij} = 12\tau$$

$$g''_{ij} = 48\tau \qquad g''_{ii} = 24\tau$$

$$g_{ijii} = 6\epsilon + 12\tau \qquad g_{ijij} = 33\epsilon + 48\tau \qquad g_{ijjj} = 6\epsilon + 12\tau \qquad g_{ijiu} = 3\epsilon + 48\tau$$

$$g_{ijju} = -3\epsilon + 48\tau \qquad g_{ijuu} = 1.5\epsilon + 12\tau$$

$$f_{ij} = 2 \qquad f'_{ij} = 2\tau$$

$$f_{iju} = f_{ijj} = f_{iji} = 24\tau \qquad f''_{ij} = 48\tau$$

$$f_{ijii} = 12\tau \qquad f_{ijij} = 48\tau + 33\epsilon \qquad f_{ijjj} = 12\tau + 6\epsilon \qquad f_{ijiu} = 48\tau + 3\epsilon$$

$$f_{ijju} = 48\tau - 3\epsilon \qquad f_{ijuu} = 12\tau + 1.5\epsilon$$

$$h^{(1)}_{ijli} = 15\epsilon + 48\tau \qquad h^{(1)}_{ijlj} = 0.75\epsilon + 24\tau \qquad h^{(1)}_{ijll} = 0.75\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(1)}_{ijii} = 21\epsilon + 24\tau \qquad h^{(1)}_{ijij} = 9.75\epsilon + 24\tau \qquad h^{(1)}_{ijil} = 1.5\epsilon + 48\tau$$

$$h^{(1)}_{iiji} = 10.5\epsilon + 12\tau \qquad h^{(1)}_{iijj} = 4.875\epsilon + 12\tau \qquad h^{(1)}_{iiju} = 0.75\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(1)}_{ij^-li} = 15\epsilon + 48\tau \qquad h^{(1)}_{ij^-lj} = h^{(1)}_{ij^-ll} = 0.75\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(1)}_{ijl^-i} = 15\epsilon + 48\tau \qquad h^{(1)}_{ijl^-j} = h^{(1)}_{ijl^-l} = 0.75\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(1)}_{ij^-l^-i} = 15\epsilon + 48\tau \qquad h^{(1)}_{ij^-l^-j} = h^{(1)}_{ij^-l^-l} = 0.75\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(1)}_{ijl} = 24\tau \qquad h^{(1)}_{iij} = 12\tau \qquad h^{(1)}_{ij^-l} = h^{(1)}_{ii^-j} = 24\tau \qquad h^{(1)}_{ij^-j} = 12\tau$$

$$h^{(1)}_{ijl^-} = 24\tau \qquad h^{(1)}_{iij^-} = 12\tau \qquad h^{(1)}_{iii^-} = 6\tau \qquad h^{(1)}_{iji^-} = 24\tau$$

$$h^{(1)}_{ij^-l^-} = 24\tau \qquad h^{(1)}_{ii^-j^-} = 24\tau \qquad h^{(1)}_{ij^-i^-} = 24\tau$$

$$h^{(2)}_{ijli} = 7.5\epsilon + 24\tau \qquad h^{(2)}_{iiij} = 10.5\epsilon + 12\tau \qquad h^{(2)}_{ij^-li} = 7.5\epsilon + 24\tau \qquad h^{(2)}_{ii^-ij} = 21\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(2)}_{ijli^-} = 15\epsilon + 48\tau \qquad h^{(2)}_{ijji^-} = 8.25\epsilon + 12\tau \qquad h^{(2)}_{ijjl^-} = 3.75\epsilon + 12\tau$$

$$h^{(2)}_{ij^-l^-i} = 7.5\epsilon + 24\tau \qquad h^{(2)}_{ij^-l^-j} = 7.5\epsilon + 24\tau \qquad h^{(2)}_{ij^-l^-l} = 7.5\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(2)}_{ij^-ll^-} = 7.5\epsilon + 24\tau \qquad h^{(2)}_{ij^-li^-} = 15\epsilon + 48\tau$$

$$h^{(2)}_{ij^-l^-i^-} = 15\epsilon + 48\tau \qquad h^{(2)}_{ij^-j^-i^-} = 8.25\epsilon + 12\tau \qquad h^{(2)}_{ij^-j^-l^-} = 3.75\epsilon + 12\tau$$

$$h^{(3)}_{ijli} = 0.75\epsilon + 24\tau \qquad h^{(3)}_{ijlj} = 15\epsilon + 48\tau \qquad h^{(3)}_{ijll} = 0.75\epsilon + 24\tau \qquad h^{(3)}_{ijji} = 4.875\epsilon + 12\tau$$

$$h^{(3)}_{ijjj} = 10.5\epsilon + 12\tau \qquad h^{(3)}_{ijjl} = 0.75\epsilon + 24\tau \qquad h^{(3)}_{ijl} = 24\tau \qquad h^{(3)}_{ijj} = 12\tau$$

$$h^{(3)}_{iiji} = 12\epsilon + 24\tau \qquad h^{(3)}_{iijj} = 9.75\epsilon + 24\tau \qquad h^{(3)}_{iijl} = 1.5\epsilon + 48\tau \qquad h^{(3)}_{iij} = 24\tau$$

$$h^{(3)}_{ii^-ji} = 21\epsilon + 24\tau \qquad h^{(3)}_{ii^-jj} = 9.75\epsilon + 24\tau \qquad h^{(3)}_{ii^-jl} = 1.5\epsilon + 48\tau$$

$$h^{(3)}_{ij^-ji} = 9.75\epsilon + 24\tau \qquad h^{(3)}_{ij^-jj} = 21\epsilon + 24\tau \qquad h^{(3)}_{ij^-jl} = 15\epsilon + 48\tau$$

$$h^{(3)}_{ij^-li} = 0.75\epsilon + 24\tau \qquad h^{(3)}_{ij^-lj} = 0.75\epsilon + 24\tau \qquad h^{(3)}_{ij^-ll} = 15\epsilon + 48\tau$$

$$h^{(3)}_{ii^-j} = 24\tau \quad h^{(3)}_{ij^-j} = 24\tau \quad h^{(3)}_{ij^-l} = 24\tau$$

$$h^{(3)}_{iii^-i} = 16\epsilon + 8\tau \quad h^{(3)}_{iii^-j} = 12\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{iji^-i} = 4\epsilon + 8\tau \quad h^{(3)}_{iji^-j} = 16.5\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(3)}_{iji^-l} = 1.5\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{iij^-i} = 21\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{iij^-j} = 9.75\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{iij^-l} = 1.5\epsilon + 48\tau$$

$$h^{(3)}_{ijj^-i} = 9.75\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{ijj^-j} = 21\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{ijj^-l} = 1.5\epsilon + 48\tau \quad h^{(3)}_{ijl^-i} = 0.75\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(3)}_{ijl^-j} = 15\epsilon + 48\tau \quad h^{(3)}_{ijl^-l} = 0.75\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{iii^-} = 12\tau \quad h^{(3)}_{iji^-} = 12\tau$$

$$h^{(3)}_{iij^-} = 24\tau \quad h^{(3)}_{ijj^-} = 24\tau \quad h^{(3)}_{ijl^-} = 24\tau$$

$$h^{(3)}_{ii^-i^-i} = 8\epsilon + 4\tau \quad h^{(3)}_{ii^-i^-j} = 6\epsilon + 12\tau \quad h^{(3)}_{ii^-j^-i} = 21\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{ii^-j^-j} = 9.75\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(3)}_{ii^-j^-l} = 1.5\epsilon + 48\tau \quad h^{(3)}_{ij^-i^-i} = 4\epsilon + 8\tau \quad h^{(3)}_{ij^-i^-j} = 16.5\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{ij^-i^-l} = 1.5\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(3)}_{ij^-j^-i} = 4.875\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{ij^-j^-j} = 10.5\epsilon + 12\tau \quad h^{(3)}_{ij^-j^-l} = 0.75\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{ij^-l^-i} = 0.75\epsilon + 24\tau$$

$$h^{(3)}_{ij^-l^-j} = 15\epsilon + 48\tau \quad h^{(3)}_{ij^-l^-l} = 0.75\epsilon + 24\tau \quad h^{(3)}_{ii^-i^-} = 6\tau \quad h^{(3)}_{ij^-j^-} = 12\tau$$

$$h^{(3)}_{ii^-j^-} = 24\tau \quad h^{(3)}_{ij^-l^-} = 24\tau \quad h^{(3)}_{ii^-i^-} = 12\tau$$

$$h^{(4)}_{iji} = 12\tau \quad h^{(4)}_{ijl} = 24\tau \quad h^{(4)}_{ii^-i} = h^{(4)}_{ij^-i} = 24\tau \quad h^{(4)}_{ii^-j} = 48\tau$$

$$h^{(4)}_{ijj^-j} = h^{(4)}_{ij^-l} = 48\tau \quad h^{(4)}_{iji^-} = h^{(4)}_{ijj^-} = h^{(4)}_{ijl^-} = 48\tau \quad h^{(4)}_{ij^-i^-} = h^{(4)}_{ij^-l^-} = 24\tau$$

$$h^{(5)}_{ii} = 0.375\epsilon + 12\tau \quad \tilde{h}^{(5)}_{ii} = 2h^{(5)}_{ii} \quad h^{(5)}_{ii+1} = 7.5\epsilon + 48\tau \quad \tilde{h}^{(5)}_{ii+1} = 2h^{(5)}_{ii+1}$$

$$h^{(5)}_{ii+2} = 0.75\epsilon + 24\tau \quad \tilde{h}^{(5)}_{ii+2} = 2h^{(5)}_{ii+2} \quad h^{(5)}_{ii^-} = 1.5\epsilon + 48\tau \quad \tilde{h}^{(5)}_{ii^-} = 1/2h^{(5)}_{ii^-}$$

$$h^{(5)}_{i(i+1)^-} = 15\epsilon + 48\tau \quad \tilde{h}^{(5)}_{i(i+1)^-} = 1/2h^{(5)}_{i(i+1)^-}$$

$$h^{(5)} = 8\tau$$

$$h^{(6)}_{ijj} = h^{(6)}_{iju} = 24\tau \quad h^{(6)}_{iij} = 8\tau \quad h^{(6)}_{ii^-i} = h^{(6)}_{ij^-i} = 48\tau \quad h^{(6)}_{ii^-j} = h^{(6)}_{ij^-j} = 24\tau$$

$$h^{(6)}_{iii^-} = h^{(6)}_{iij^-} = 24\tau \quad h^{(6)}_{iji^-} = h^{(6)}_{ijj^-} = h^{(6)}_{iju^-} = 48\tau$$

$$h^{(6)}_{ij^-j^-} = h^{(6)}_{ii^-i^-} = 48\tau \quad h^{(6)}_{ij^-u^-} = h^{(6)}_{ii^-j^-} = 24\tau \quad h^{(6)}_{ij^-i^-} = 48\tau$$

$$h^{(7)}_{ijj} = 12\tau \quad h^{(7)}_{iij} = h^{(7)}_{ijl} = 24\tau \quad h^{(7)}_{ii^-j} = h^{(7)}_{ij^-j} = h^{(7)}_{ij^-l} = 24\tau$$

$$h^{(7)}_{iii^-} = h^{(7)}_{iij^-} = h^{(7)}_{iji^-} = 48\tau \quad h^{(7)}_{ijj^-} = h^{(7)}_{ijl^-} = 48\tau$$

$$h^{(7)}_{ii^-j^-} = h^{(7)}_{ij^-i^-} = 48\tau \quad h^{(7)}_{ii^-i^-} = h^{(7)}_{ij^-j^-} = 24\tau \quad h^{(7)}_{ij^-l^-} = 48\tau$$

$$h^{(8)}_{ii} = h^{(8)}_{ij} = 12\tau \quad h^{(8)}_{ii^-} = h^{(8)}_{ij^-} = 12\tau$$

$$h^{(9)}_{ij} = h^{(9)}_{ii} = 8\tau$$

Note, that coupling coefficients involving the constant shift δ only occur in case of the product-type inter-map coupling energy.